Глава I. КИНЕМАТИКА ЧАСТИЦЫ

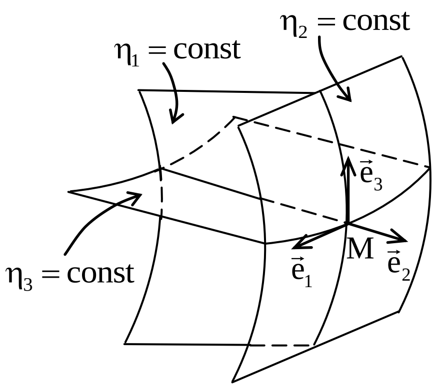
Кинематика занимается описанием механических движений, считая их заданными. Она оперирует геометрическими соотношениями между телами и характером их изменения во времени, а потому может быть названа хроногеометрией. Последняя обобщает обычную геометрию путем добавления к трем пространственным измерениям еще одного – временного. Поэтому, прежде всего, мы должны рассмотреть пространственно-временные отношения, а затем, собственно, кинематику. Основные понятия кинематики – система отсчета и закон движения.

§1. Пространство и время в классической физике

Всякий физический процесс, в том числе и механическое движение, развивается в пространстве и во времени. Физические процессы расчленяются на элементарные события, которые, как и точки в геометрии, неопределимы. На интуитивном уровне под *элементарным событием E* (от англ. event) понимается то, что произошло в данной точке пространства в данный момент времени. При описании множества событий {E} необходимо каждому из них сопоставить определенные числа, т.е., как говорят, арифметизировать пространство и время. Для этого следует ввести какую-то систему отсчета.

а) *Пространственная система координат*

Для арифметизации пространства в нем, прежде всего, выбирают твердое тело, называемое *телом отсчета*. В этом теле фиксируется некоторая точка O – *начало отсчета*. К телу отсчета присовокупляется эталонный *масштаб длины*, позволяющий измерять расстояния. В результате возникает (пространственная) система координат. В дальнейшем для удобства в качестве тела отсчета всегда будет браться «крестовина» на трех прямых взаимно перпендикулярных твердых бесконечных стержней, а роль начала отсчета будет играть точка их пересечения. В заданной системе координат каждой точке пространства сопоставляются три числа – ее координаты. Делается это так. Построим три однопараметрических семейства поверхностей, каждая из которых задается определенным значением одного из непрерывно меняющихся параметров η_1, η_2, η_3 (рис1.1).



В каждой точке пространства пересекаются три поверхности из разных семейств. Ее *координатами* и называют соответствующие значения параметров η_1, η_2, η_3, постоянные для каждой поверхности.

Подобная процедура порождает также *координатную сетку*. Ее образуют *координатные линии* – кривые из трех взаимно ортогональных двупараметрических семейств. Каждая такая кривая есть линия пересечения поверхностей из двух разных семейств, и вдоль нее меняется лишь один параметр, который отвечает третьему семейству.

Наличие координатной сетки позволяет ввести в каждой точке пространства *локальный репер*. Его образуют базисные орты $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, направленные вдоль касательных к координатным линиям. Эти векторы взаимно ортогональны и обычно выбираются нормированными:

$$\left(\overline{e}_i, \overline{e}_j\right) = \delta_{ij} \qquad /i, j = 1,2,3/, \tag{1.1}$$

где δ_{ij} – обычный символ Кронекера. Важно осознавать, что ориентация локального репера меняется от точки к точке, причем непрерывным образом.

Произвольному вектору $\overline{A}$, прикрепленному к данной точке пространства, теперь можно сопоставить тройку чисел A_1, A_2, A_3 – набор его компонент относительно локального репера. Для этого достаточно представить этот вектор в форме

$$\overline{A} = A_1\overline{e}_1 + A_2\overline{e}_2 + A_3\overline{e}_3 \equiv \{A_1, A_2, A_3\}. \tag{1.2}$$

В силу условия (1.1), квадрат модуля этого вектора вычисляется как

$$\overline{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \tag{1.3}$$

В частности, подобное представление допускает и *радиус-вектор* $\vec{r}$, проведенный из начала отсчета О в данную точку пространства:

$$\vec{r} = r_1\overline{e}_1 + r_2\overline{e}_2 + r_3\overline{e}_3 \equiv \{r_1, r_2, r_3\}. \tag{1.4}$$

Записывая радиус-вектор близкой точки как $\overline{r} + d\overline{r}$, мы для приращения $d\overline{r}$ имеем

$$d\overline{r} = df_1\overline{e}_1 + df_2\overline{e}_2 + df_3\overline{e}_3, \tag{1.5}$$

где каждая из функций df_i пропорциональна, очевидно, приращениям параметра $d\eta_i$, который только и меняется вдоль данной координатной прямой:

$$d\overline{r} = \gamma_1 d\eta_1\overline{e}_1 + \gamma_2 d\eta_2\overline{e}_2 + \gamma_3 d\eta_3\overline{e}_3. \tag{1.6}$$

Вычисляя квадрат модуля этого вектора по формуле (1.4), получим:

$$d\overline{r}^2 \equiv dl^2 = g_{11}d\eta_1^2 + g_{22}d\eta_2^2 + g_{33}d\eta_3^2, \tag{1.7}$$

где каждая из величин $g_{ii} \equiv \gamma_{ii}^2$ есть, вообще говоря, функция от всех трех координат η_1, η_2, η_3. Формула (1.7) позволяет вычислять расстояния между двумя любыми бесконечно близкими точками, а потому говорят, что она задает *метрику* в пространстве (при заданной его арифметизации).

В общей ситуации, когда используется косоугольная координатная сетка (а не ортогональная, как выше), метрика имеет вид

$$dl^2 = g_{ij}d\eta_i d\eta_{ji}, \tag{1.8}$$

где по i и j суммируется от 1 до 3. Девять числовых функций

$$g_{ij} = g_{ij}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \tag{1.9}$$

образуют *метрический тензор*. Поскольку, очевидно,

$$g_{ij} = g_{ji}, \tag{1.10}$$

независимых компонент у g_{ij} на самом деле не 9, а всего 6.

Постулат 1. Пространство является трехмерным $\left(\mathbb{R}^3\right)$, причем в классической физике оно предполагается евклидовым $\left(\mathbb{E}^3\right)$.

Трехмерность пространства означает как раз, что положение любой его точки однозначно характеризуется заданием трех вещественных чисел – координат. *Евклидовость* равнозначна возможности введения во всем пространстве декартовых координат x, y, z, в которых метрика имеет вид:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.11}$$

Для пояснения укажем, что обычная плоскость является двумерным евклидовым пространством. Обычная же сфера двумерна (арифметизация достигается введением, скажем, долготы и широты), но не евклидова (попробуйте ввести на сфере единые декартовы координаты x,y).

Пространство обладает еще двумя фундаментальными свойствами – *однородностью* и *изотропностью*. Но они проявляются не кинематически, а динамически, а потому речь о них пойдет в следующих главах. Введенные выше понятия являются основополагающими для *общей теории относительности,* где они должным образом обобщаются. Мы к ним также будем обращаться, но весьма эпизодически.

Подчеркнем, что под пространственной системой координат мы понимаем жесткий «крест», дополненный «линейкой». Поэтому изменение координатной сетки еще *не означает* изменение системы координат.

б) *Временная система координат*

Во времени фиксируется *начало отсчета* O_t выбирают *эталонные часы.* В итоге возникает *временная система координат.* При этом под часами в самом общем случае понимается какой-то воспроизводимый периодический процесс, протекание которого по определению считается равномерным. Таким образом, каждому моменту времени оказывается возможно сопоставить вещественное число t – промежуток времени, отмеренный часами от начала отсчета до данного момента.

Постулат 2. Время обладает структурой ориентированной прямой.

Это означает, что оно одномерно, и что имеется выделенное направление времени – оно течет из «прошлого» в «будущее», хотя формально можно рассматривать и обратный ход времени. В микромире оба направления времени равноправны (за одним единственным исключением). Природа же макроскопической необратимости времени до конца не выяснена (см. Г. Рейхенбах, Направление времени, ИЛ.; М. – 1962).

в) *Система отсчета*

Совокупность пространственной и временной систем координат называется *системой отсчета*. В принципе временной системой координат должна быть снабжена каждая пространственная точка. Здесь возникает принципиальная и весьма сложная проблема балансировки (одинаковости хода и синхронизации (согласования начальных моментов) часов, находящихся в разных точках. Однако в классической физике делается следующее фундаментальное предположение, позволяющее обходиться одними часами, при помещении, например, в начало пространственной системы координат.

Постулат 3. Время в классической физике считается абсолютным.

Это означает, что оно протекает одинаково во всех пространственных точках и независимо от состояния движения системы координат по отношению к какой-то другой системе отсчета. Как мы увидим в курсе СТО постулат 3 фактически равнозначен гипотезе о существовании в природе сигналов, распространяющихся *сколь угодно быстро*.

В действительности, как мы знаем, скорость протекания всякого материального процесса ограничена конечной *скоростью света* в вакууме. Поэтому проблема построения систем отсчета в СТО является весьма нетривиальной. В своем месте мы ее, разумеется, обсудим.

Итак, в заданной системе отсчета S множество событий $\{E\}$ отображается в вещественное четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$:

$$S:\{E\}\to\mathbb{R}^4. \tag{1.12}$$

Это означает только то, что в фиксированной системе отсчета каждому событию сопоставляются четыре вещественных числа:

$$S:E\to X\equiv(\eta_1,\eta_2,\eta_3;t)=(\vec{r};t). \tag{1.13}$$

При этом постулат 3 равнозначен тому, что $\mathbb{R}^4$ распадается на два независимых подпространства – обычное пространство $\mathbb{R}^3$ и время R.

Таким образом, в классической физике пространство и время рассматриваются просто как арена, на которой развертываются физические явления. Иными словами, предполагается, что пространство существует само по себе, а время – само по себе, и что материальные тела не оказывают никакого влияния на пространственно-временные отношения. К тому же принимается следующая фундаментальная гипотеза, касающаяся процедур измерения физических величин.

Постулат 4. В классической физике считается возможным совместное измерение со сколь угодно высокой степенью точности любой пары физических величин, характеризующих рассматриваемую систему.

Общие положения, которые представляются совершенно очевидными, мы недаром сформулировали в виде отдельных постулатов. Дело в том, что в разных разделах современной физики, и прежде всего в релятивистской физике и в квантовой физике, все они подвергаются ревизии и их заменяют некоторые более общие утверждения.

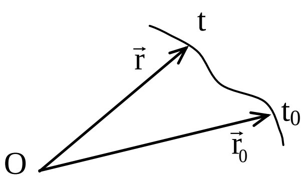
§2. Кинематика частицы

Пусть задана одна частица и фиксирована некоторая система отсчета S. Наша задача – ввести величины, характеризующие движение этой частицы и указать способы ее описания. Возможны разные подходы к решению этой проблемы. Все они эквивалентны и в данной конкретной ситуации используется тот из них, который представляется наиболее удобным и естественным. Мы на этих вопросах остановимся совсем кратко, оставляя решение некоторых из них на практические занятия.

а) *Векторный формализм*

Этот способ наиболее удобен при проведении общих исследований. Он не предполагает введение координатной сетки, так как положение частицы задается ее *радиусом-вектором* $\vec{r}$. Ее кинематическое поведение полностью описано, если задан *закон движения*

$$\overline{r} = \overline{r}(t). \tag{2.1}$$



По закону движения, можно найти *все* его характеристики. Так, (2.1) представляет собой параметрическое уравнение *траектории*. Далее известна *скорость* частицы, определяемая как

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} \equiv \dot{\overline{r}}, \tag{2.2}$$

и ее *ускорение*

$$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}}. \tag{2.3}$$

В принципе можно ввести и высшие производные от $\overline{r}$ по времени, но в том-то и суть классической механики, что они оказываются излишними (см. гл. II). По закону движения элементарно находится *путь*, пройденный частицей за время от t_0 до t:

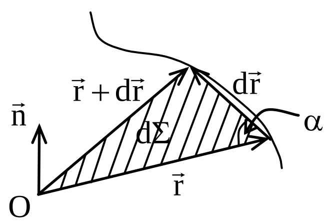
$$S = \int_{t_0}^{t} \left|\dot{\overline{r}}(t)\right| dt. \tag{2.4}$$

В некоторых задачах полезным является понятие *секторной скорости*

$$\overline{\delta} = \frac{1}{2}\left[\overline{r}\ \overline{v}\right]. \tag{2.5}$$

Для выяснения смысла этой величины запишем (2.5) в виде

$$\overline{\delta} = \frac{1}{2}\frac{\left[\overline{r}d\overline{r}\right]}{dt}$$



и рассмотрим бесконечно малый участок траектории, который можно считать плоским. Имеем:

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{r\left[d\overline{r}\right]\sin\alpha}{dt} = \frac{\frac{1}{2}r\left|d\overline{r}\right|}{dt} = \frac{d\Sigma}{dt}.$$

Здесь учтено, что с точностью до величин высшего порядка малости $\alpha = \pi / 2$, причем с той же степенью точности величина $\frac{1}{2} r \left| d\bar{r} \right|$ есть площадь $d\Sigma$ сектора, заштрихованного на рисунке. Вводя единичный вектор нормали $\vec{n}$ плоскости траектории, окончательно получаем

$$\vec{\delta} = \frac{d\Sigma}{dt} \vec{n} . \qquad (2.6)$$

б) *Координатный формализм*

Этот формализм удобен при решении конкретных задач. Он основывается на сопоставлении каждому положению частицы трех *координат* η_1, η_2, η_3, которые вводятся способом описанным в §1. Закон движения частицы имеет вид:

$$\eta_1 = \eta_1(t),\ \eta_2 = \eta_2(t),\ \eta_3 = \eta_3(t). \qquad (2.7)$$

Его можно рассматривать также как параметрические уравнения траектории частицы.

При подобном способе арифметизации пространства в каждой его точке дополнительно вводится ортонормированный локальный репер, образуемый ортами $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3$. Представляя произвольный вектор $\bar{A}$ в форме (1.2), мы сопоставим ему тройку чисел $A_1,\ A_2,\ A_3$:

$$\bar{A} = A_1 \bar{e}_1 + A_2 \bar{e}_2 + A_3 \bar{e}_3 . \qquad (2.8)$$

Поскольку ориентация локального репера меняется, вообще говоря, от точки к точке, то при вычислении производной вектора $\vec{A}$ по времени следует дифференцировать не только его компоненты, но и орты:

$$\dot{\bar{A}} = \left(\dot{A}_1 \bar{e}_1 + \dot{A}_2 \bar{e}_2 + \dot{A}_3 \bar{e}_3 \right) + \left(A_1 \dot{\bar{e}}_1 + A_2 \dot{\bar{e}}_2 + A_3 \dot{\bar{e}}_3 \right). \qquad (2.9)$$

Однако, в лекционном курсе нам подобные выкладки нигде не встретятся, кроме как при использовании декартовых координат, где они тривиальны. Некоторые более сложные примеры рассматриваются на практических занятиях.

Наиболее же существенной для нас и в общей ситуации будет *математическая форма* (1.8):

$$dl^2 = g_{11} d\eta_1^2 + g_{22} d\eta_2^2 + g_{33} d\eta_3^2 . \qquad (2.10)$$

Зная ее, можно сразу получить выражение для *квадрата скорости* частицы в используемых криволинейных координатах. Для этого достаточно делить обе части (2.10) на dt^2:

$$v^2 = g_{11} \cdot \dot{\eta}_1^2 + g_{22} \cdot \dot{\eta}_2^2 + g_{33} \cdot \dot{\eta}_3^2 . \qquad (2.11)$$

Квадрат же скорости частицы важен потому, что он сразу задает ее кинетическую энергию и позволяет записать функцию Лагранжа.

Рассмотрим теперь наиболее важные координаты, используемые в механике. К ним относятся: на плоскости – декартовы и полярные координаты, в пространстве – декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

б1. Декартовы координаты

Чаще всего в качестве координатных поверхностей выбирают плоскости, перпендикулярные осям системы координат, задавая положение частицы *декартовыми* координатами $x,\ y,\ z$. Закон движения и траектория (в параметрической форме) задаются тремя уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Исключив время, получим уравнение траектории:

$$f_1(x,z) = 0, \qquad f_2(y,z) = 0, \tag{2.12}$$

задающее ее как линию пересечения двух цилиндрических поверхностей. В важном частном случае плоского движения (2.12) дает ($z = 0$)

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{или} \qquad y = f(x). \tag{2.13}$$

Локальные реперы образуют орты, одинаково ориентированные во всех точках пространства. Поэтому можно обойтись одним декартовым базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, помещенным в начало координат O. Эти орты постоянны и дифференцировать по времени их не нужно.

Компонентами радиуса-вектора служат сами декартовы координаты:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \equiv (x,y,z). \tag{2.14}$$

Приращение $d\bar{r}$ радиуса-вектора записывается в компонентах, как

$$d\bar{r} = \{dx, dy, dz\}, \tag{2.15}$$

а потому *метрика* в декартовых координатах имеет евклидову форму:

$$d\bar{r}^2 = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.16}$$

Дифференцируя (2.14) по времени, для скорости получим:

$$\bar{v} \equiv \{v_x, v_y, v_z\} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}, \tag{2.17}$$

так что ее квадрат равен

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \tag{2.18}$$

Эту формулу можно получить и поделив обе части (2.16) на dt^2. Вектор ускорения записывается декартовых координатах как

$$\vec{w} \equiv \{w_x, w_y, w_z\} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}, \tag{2.19}$$

а путь вычисляется по формуле

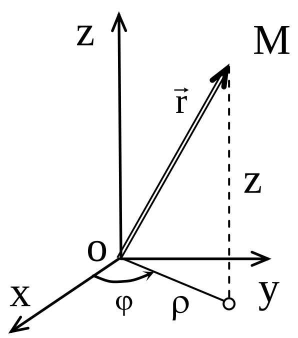
$$S=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt. \qquad (2.20)$$

Компоненты секторной скорости получим, раскрывая детерминант

$$\sigma=\frac{1}{2}[\bar{r}\ \bar{v}]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}. \qquad (2.21)$$

б2. Цилиндрические координаты

Если в качестве координатных поверхностей взять коаксиальные цилиндры $\rho=const$ с общей осью Oz плоскости $\varphi=const$ и плоскостью $z=const$, то получим цилиндрические координаты $\rho,\ \varphi,$ z.



С декартовыми координатами они связаны формулой

$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\ y=\rho\cdot\sin\varphi,\ z=z. \qquad (2.22)$$

Закон движения частицы и параметрические уравнения траектории имеют вид

$$\rho=\rho(t),\ \varphi\ =\ \varphi(t),\ z\ =\ z(t). \qquad (2.23)$$

Как ясно из элементарных геометрических соображений, метрика в цилиндрических координатах задается формулой:

$$dl^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2, \qquad (2.24)$$

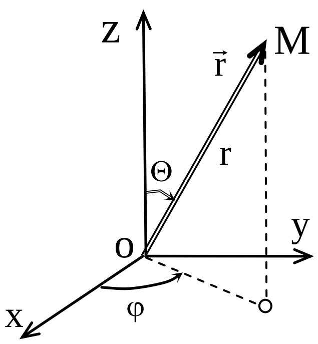
откуда для квадрата скорости имеем:

$$v^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2. \qquad (2.25)$$

Кому не нравится геометрия, может получить это выражение, дифференцируя соотношения (2.22) по времени и подставляя результаты в (2.18).

б3. Сферические координаты

Если в качестве координатных поверхностей взять концентрические сферы $r=const$ с общим центром в начале координат, плоскости $\varphi=const$ и конусы $\theta=const$, то придем к



сферическим координатам r,φ,θ. С декартовыми координатами они связаны формулами

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta. \qquad (2.26)$$

Закон движения частицы и параметрические уравнения траектории имеют вид:

$$r=r(t),\ \varphi=\varphi(t),\ \theta=\theta(t). \qquad (2.27)$$

Как показывает элементарная геометрия, метрика в сферических координатах имеет вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \tag{2.27a}$$

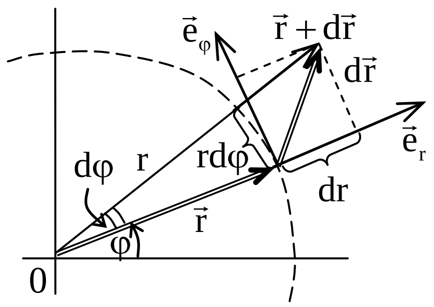
откуда для квадрата скорости получаем:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \tag{2.28}$$

К этому результату можно прийти также из (2.25) и (2.18).

б4. Полярные координаты

Если на плоскости в качестве координатных «поверхностей» взять концентрические окружности $r = const$ и $\varphi = const$, то получим полярные координаты r, φ. С декартовыми координатами они связаны формулами



$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \tag{2.29}$$

Закон движения частицы и параметрические уравнения траектории имеют вид

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{2.30}$$

Ясно, что полярные координаты суть частный случай цилиндрических координат при $z = 0$ и сферических координат при $\theta = \pi/2$.

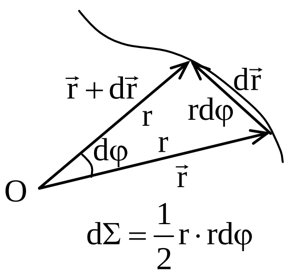
Плоская метрика в полярных координатах задается формулой

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \tag{2.31}$$

откуда для квадрата скорости имеем:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{2.32}$$

Поэтому путь частицы вычисляется по формуле:



$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt. \tag{2.33}$$

Вспоминая смысл секторной скорости, из приведенного рисунка для нее сразу получим

$$\delta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \tag{2.34}$$

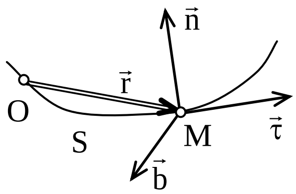
Приведем также без вывода выражения для компонент векторов скорости ускорения в локальном репере:

$$\vec{v} = v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi;\quad v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \tag{2.35}$$

$$\vec{w} = w_r \vec{e}_r + w_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi;\quad w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{2.36}$$

в) *Естественный формализм*

Этот способ наиболее удобен, когда априори известна траектория частицы (она движется по проволоке, по желобу и т.д.). На траектории выбирается точка отсчета O, и положение частицы задается ее расстоянием S вдоль кривой от точки O, т.е. длиной дуги $\overset{\frown}{OM}$, или путем, если частица начала движение в точке O. Закон движения записывается в данном случае как



$$S = S(t). \tag{2.45}$$

С самой частицей связывается локальный репер, орты которого определенным образом согласованы с траекторией. Для построения этого репера проводятся три плоскости:

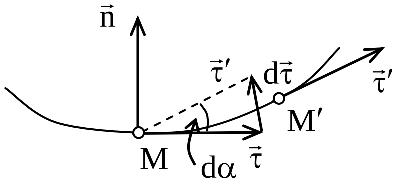
1. *Соприкасающаяся* – предельная плоскость, которая получается из плоскости, проведенной через данную точку кривой и две другие ее точки при их неограниченном сближении (в случае плоской траектории – это сама содержащая ее плоскость);
2. *Спрямляющая* – проходящая через касательную к кривой в данной точке и перпендикулярная соприкасающейся плоскости;
3. *Нормальная* – перпендикулярная соприкасающейся и спрямляющей плоскостям.

Единичные орты, направленные вдоль прямых, по которым пересекаются указанные орты, и образуют локальный репер, называемый *трехгранником Френе*. Они обозначаются как $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ и называются соответственно как *касательный, нормальный* и *бинормальный* орты. Именно по ним и разлагается всякий произвольный вектор $\vec{A}$:

$$\vec{A} = A_\tau \vec{\tau} + A_n \vec{n} + A_b \vec{b} \equiv \{A_\tau, A_n, A_b\}, \tag{2.46}$$

причем при дифференцировании этого вектора по времени следует дифференцировать и естественные орты. Нам потребуется лишь производная касательного орта, для которой имеем:

$$\dot{\vec{\tau}} \equiv \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{dS} = v\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dS}.$$



Но из рисунка:

$$d\vec{\tau} = d\alpha \cdot \vec{n},$$

так что

$$\dot{\vec{\tau}} = v\frac{d\alpha}{dS} \cdot \vec{n}.$$

Величина

$$k \equiv \frac{d\alpha}{dS} \equiv \frac{1}{R} \tag{2.47}$$

называется *кривизной* кривой в точке M, а R – радиусом кривизны. Последнее название оправдывается тем, что для окружности имеем

$$R = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{R_0 \cdot d\alpha}{d\alpha} = R_0 \,,$$

так что радиус кривизны совпадает с обычным радиусом. Итак, с учетом (2.47) для производной касательного вектора по времени имеем:

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{v}{R}\vec{n} \,. \tag{2.48}$$

Радиус-вектор $\vec{r}$ обычно не разлагают по естественным ортам, поскольку он в данном формализме играет подчиненную роль. Для вектора скорости имеем:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS}\frac{dS}{dt} = \dot{S}\,\frac{d\vec{r}}{dS} \,.$$

Но $|d\vec{r}| = dS$, причем вектор $d\vec{r}$ параллелен вектору $\vec{\tau}$, так что

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau} \,. \tag{2.49}$$

Поэтому

$$\vec{v} \equiv \{v_\tau, v_n, v_b\} = \dot{S}\vec{\tau} = \{\dot{S}, 0, 0\} \,. \tag{2.50}$$

Таким образом, вектор скорости направлен по касательной к траектории, что является общеизвестным фактом.
Для вектора ускорения с учетом (2.48) имеем

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{S}\vec{\tau}\right) = \ddot{S}\vec{\tau} + \dot{S}\dot{\vec{\tau}} = \ddot{S}\vec{\tau} + \dot{S}\,\frac{v}{R}\cdot\vec{n} \,,$$

т.е.

$$\vec{w} \equiv \{w_\tau, w_n, w_b\} = \ddot{S}\vec{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{R}\vec{n} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \equiv \left\{\dot{v}, \frac{v^2}{R}, 0\right\}. \tag{2.51}$$

Как известно, компонента w_τ называется *тангенциальным* ускорением, а w_n – *нормальным* ускорением. Проекция ускорения на бинормаль всегда равна нулю.

Если закон движения частицы задан в декартовых координатах, то

$$w_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, w_n = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, R = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} \,. \tag{2.52}$$

Эти формулы известны из математики и выводятся на практических занятиях.

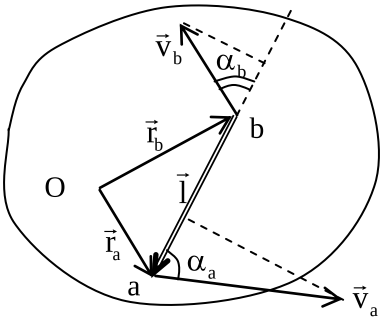
§3. Кинематика твердого тела

Твердое тело – континуум частиц, расстояние между любой парой a и b которых есть величина постоянная:

$$\left(\vec{r}_a - \vec{r}_b\right)^2 \equiv l^2 = const\,. \tag{3.1}$$

Положение одной частицы задается тремя числами – например, ее декартовыми координатами x, y, z. В этом смысле говорят, что она имеет три степени свободы. Для определения положения твердого тела в общей ситуации достаточно задать положение жестко связанного с ним треугольника. Он имеет три вершины, положения которых задаются 3×3 – девятью числами. Однако на каждую пару вершин наложено условие типа (3.1) – всего три соотношения. Поэтому твердое тело имеет *6 степеней свободы.*

Из определения твердого тела вытекает следующий часто используемый результат.



Теорема о скольжении

Проекция векторов скорости $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_b$ твердого тела a и b на прямую ab одинаковы:

$$np_{ab}\vec{v}_a = np_{ab}\vec{v}_b\,. \tag{3.2}$$

Доказательство:

Дифференцируя равенство (3.1) по времени, имеем

$$2\left(\bar{r}_a - \bar{r}_b\right)\left(\dot{\bar{r}}_a - \dot{\bar{r}}_b\right) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{l}\left(\vec{v}_a - \vec{v}_b\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\bar{v}_a, \bar{l}\right) = \left(\bar{v}_b, \bar{l}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_a l \cdot \cos\alpha_a = v_b l \cdot \cos\alpha_b \;\Rightarrow\; v_a \cdot \cos\alpha_a = v_b \cdot \cos\alpha_b\,,$$

что и требовалось доказать.

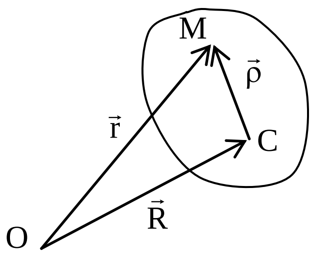
В зависимости от того, какие дополнительные ограничения наложены на перемещения твердого тела, различают следующие виды его движения:

а) поступательное движение – три степени свободы,
б) вращение относительно неподвижной оси – одна степень свободы,
в) движение с одной неподвижной точкой – три степени свободы,
г) свободное движение – шесть степеней свободы,
д) плоско-параллельное движение – три степени свободы.

Рассмотрим совсем кратко отдельные виды движений твердого тела.

а) *Поступательное движение*

Это такое движение твердого тела, при котором прямая, проведенная через две любые его точки, остается параллельной самой себе. Выбирая «неподвижное» начало отсчета O и фиксируя в теле какую-то точку C, для радиуса-вектора $\bar{r}$ произвольной точки M можно будет записать



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}\,. \tag{3.3}$$

По определению поступательного движения, вектор $\bar{\rho}$ не меняет направления, а по определению твердого тела он не меняет величины, так что

$$\vec{\rho} = const\,. \tag{3.4}$$

Таким образом, движение любой точки твердого тела будет вполне определено, если известно движение точки C, т.е. зависимость

$$\vec{R} = \vec{R}(t). \tag{3.5}$$

Отсюда видно, что число степеней свободы твердого тела при поступательном движении равно трем.

Дифференцируя по времени (3.3) с учетом (3.4), получим

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} \tag{3.6}$$

и

$$\vec{w} = \ddot{\vec{R}}\,. \tag{3.7}$$

Видим, что в каждый момент времени скорости и ускорения всех точек твердого тела при его поступательном движении одинаковы. Иными словами, исследование этого движения сводится к исследованию движения одной частицы, т.е. к задаче, решенной в предыдущем параграфе.

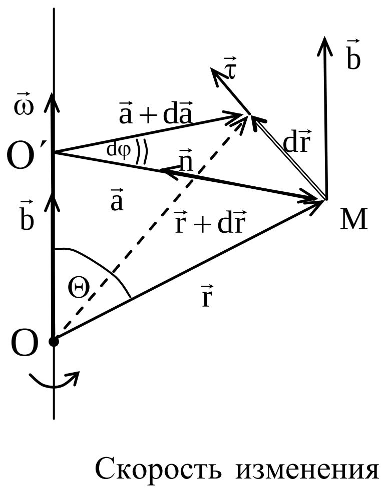
б) *Движение относительно оси*

Рассмотрим движение твердого тела, при котором неподвижны все точки некоторой прямой, называемой *осью вращения*. Оно реализуется, когда закреплены две какие-то точки твердого тела. Все частицы в этом случае движутся по окружностям, лежащим в параллельных друг другу плоскостях, которые перпендикулярны оси вращения, содержащей центр этих окружностей. Поэтому положение любой точки задается углом поворота φ, который описывается радиусом, проведенным из центра соответствующей окружности в данную точку. Закон движения имеет вид:

$$\varphi = \varphi(t), \tag{3.8}$$

так что число степеней свободы в рассматриваемом случае равно единице.

В качестве начала отсчета O выберем одну из точек оси вращения и направим вдоль этой оси единичный вектор $\vec{b}$. Найдем приращение $d\vec{r}$ радиуса-вектора $\vec{r}$ произвольной точки M тела при его бесконечно малом повороте на угол $d\varphi$. Как видно из рисунка, с точностью до членов первого порядка малости по $d\varphi$:



$$d\vec{r} \perp \vec{r},\ d\vec{r} \perp \vec{b}; \quad |d\vec{r}| = a d\varphi = r\cdot\sin\theta\cdot d\varphi\,, \tag{3.9}$$

а потому можно записать:

$$d\vec{r} = a\ d\varphi\cdot\vec{\tau} = d\varphi\left[\vec{b}\cdot\vec{r}\right]. \tag{3.10}$$

Вводя *вектор угла малого поворота*

$$d\overline{\varphi} = d\varphi\cdot\overline{b}\ , \tag{3.11}$$

представим (3.10) в форме:

$$d\overline{r} = \left[d\overline{\varphi},\overline{r}\right]. \tag{3.12}$$

Скорость изменения угла φ, т.е. «быстрота» вращения твердого тела, может быть охарактеризована вектором

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\varphi}\vec{b}\ , \tag{3.13}$$

называемым *угловой скоростью*. Поделив обе части (3.12) на время перемещения dt, получим *распределение скоростей*:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]. \tag{3.14}$$

Дифференцируя это равенство по времени, имеем

$$\dot{\vec{v}} = \left[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\dot{\vec{r}}\right]$$

и в итоге приходим к *распределению ускорений*:

$$\bar{w} = \left[\vec{\varepsilon}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right], \tag{3.15}$$

где

$$\vec{\varepsilon} \equiv \dot{\vec{\omega}}\ - \tag{3.16}$$

вектор углового ускорения.

По поводу сформулированных результатов уместно сделать несколько замечаний.

1. Все определения и результаты справедливы и в том случае, когда ось неподвижна лишь в данный момент, а с течением времени меняет свою ориентацию в пространстве и даже в самом твердом теле. Тогда соответствующая прямая называется *мгновенной осью вращения*.

2. Формула (3.12) справедлива не только для приращения радиуса вектора $\bar{r}$, но и для приращения любого вектора $\vec{A}$, связанного с твердым телом и не изменяющегося по модулю:

$$d\vec{A} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{A}\right]. \tag{3.17}$$

Отсюда для скорости изменения такого вектора во времени получаем

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\left[\vec{\omega}\vec{A}\right]. \tag{3.18}$$

3. Формулу (3.14) можно переписать так:

$$\bar{v} = \omega \cdot a \cdot \vec{\tau}\ . \tag{3.19}$$

Мы вновь заключаем, что скорость частицы всегда направлена по касательной к траектории – в данном случае к окружности. Кроме того, получаем школьную связь между линейной и угловой скоростями:

$$v = \omega \cdot a\ . \tag{3.20}$$

4. Формулу (3.15) можно представить в виде

$$\vec{w} = \varepsilon \cdot a \cdot \vec{\tau} + \omega^2 a \cdot \vec{n}\ . \tag{3.21}$$

Первое слагаемое – не что иное, как тангенциальное ускорение частицы, и мы получаем связь линейного и углового ускорений:

$$w_\tau = \varepsilon a\,. \tag{3.22}$$

Во втором слагаемом нетрудно узнать нормальное ускорение, которое при движении по окружности в школе называют центростремительным. Его можно записывать в двух известных эквивалентных формах:

$$w_n = \omega^2 \cdot a = \frac{v^2}{a}. \tag{3.23}$$

5. Формула (3.14) задает нам некоторое векторное поле – поле скоростей частиц твердого тела с постоянным (в пространстве) вектором угловой скорости. Вычислим ротор этого векторного поля:

$$rot\ \vec{v} = rot[\vec{\omega}\vec{r}] = \left[\vec{\nabla}[\vec{\omega}\vec{r}]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{\nabla}\vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\nabla}\vec{\omega}\right) = \vec{\omega}\ div\ \vec{r} - \left(\vec{\omega}\,\vec{\nabla}\right)\vec{r} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}.$$

Отсюда

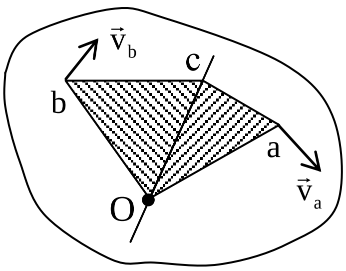
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\ \vec{v}\,, \tag{3.24}$$

в результате чего проясняется кинематический смысл ротора и оправдывается его название.

в) *Движение с одной закрепленной точкой*

Если одна из точек тела, скажем, O, закреплена, то наряду с «неподвижной» системой координат $Oxyz$ вводят жестко связанную с телом систему координат $O\xi\eta\zeta$. Ее положение относительно $Oxyz$ однозначно задает и положение всего твердого тела. Поскольку вращение системы координат вполне определяется тремя параметрами (например, так называемыми углами Эйлера), то твердое тело с одной закрепленной точкой имеет *три степени свободы*.

Рассмотрим две произвольные частицы a и b нашего тела. Проведем через точки O и a произвольную плоскость. Согласно теореме скольжения (3.2),



$$np_{Oa}\bar{v}_a = np_{Oa}\bar{v}_O = 0, \qquad т.е.\ \bar{v}_a \perp Oa\,.$$

Поэтому плоскость всегда можно путем дополнительного поворота вокруг Oa сделать перпендикулярной вектору $\bar{v}_a$. Аналогично, через прямую Ob можно провести плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{v}_b$. На рисунке эти плоскости заштрихованы.

Возьмем произвольную точку C, принадлежащую линии пересечения построенных плоскостей. Согласно теореме о скольжении (3.2),

$$np_{Oc}\bar{v}_c = np_{Oc}\bar{v}_O = 0, \quad np_{ac}\bar{v}_c = np_{ac}\bar{v}_a = 0, \quad np_{bc}\bar{v}_c = np_{bc}\bar{v}_b = 0\,,$$

а значит

$$\bar{v}_c = 0\,. \tag{3.25}$$

Таким образом, в твердом теле с закрепленной точкой 0 в каждый момент времени существует прямая, проходящая через 0 и такая, что скорости всех принадлежащих ей точек равны нулю. Эта прямая есть *мгновенная ось вращения*. Согласно замечанию 1 из предыдущего пункта, *мгновенное распределение скоростей* будет в рассматриваемом случае таким же, как и при наличии закрепленной оси:

$$\bar{v} = \left[\bar{\omega}\bar{r}\right]. \tag{3.26}$$

Дифференцируя (3.26) по времени, получим *мгновенное распределение ускорений*:

$$\bar{w} = \left[\dot{\bar{\omega}}\bar{r}\right] + \left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{r}\right]\right]. \tag{3.27}$$

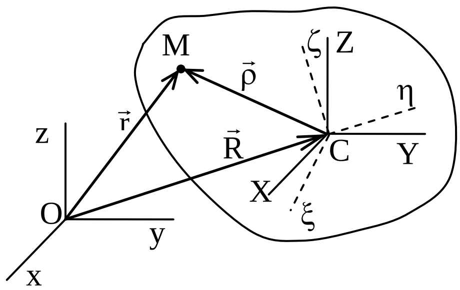
Подчеркнем еще раз, что мгновенная ось с течением времени может менять ориентацию как в пространстве, так и относительно твердого тела.

г) *Свободное движение*

Как уже говорилось в начале параграфа, в этом случае твердое тело имеет *6 степеней свободы.* Здесь удобно ввести три системы координат:

1) «неподвижную» систему координат $Oxyz$;
2) систему координат $CXYZ$, имеющую в качестве начала фиксированную точку C твердого тела и движущуюся поступательно относительно «неподвижной»;
3) систему координат $C\xi\eta\zeta$ с началом в той же точке C, жестко связанную с твердым телом.

Движение $CXYZ$ относительно $Oxyz$ дает 3 степени свободы п.а), а движение $C\xi\eta\zeta$ относительно $CXYZ$ равнозначно движению с одной закрепленной точкой C и дает еще три степени свободы (см. п.в).



В итоге произвольное движение твердого тела оказывается разложенным на поступательное движение и на движение с закрепленной точкой. Для второго из них всегда существует мгновенная ось вращения. Используя теперь результаты, полученные в п.а) и п.в), сразу приходим к *мгновенному распределению скоростей*:

$$\vec{v} = \bar{V} + \left[\bar{\omega}\bar{\rho}\right], \tag{3.28}$$

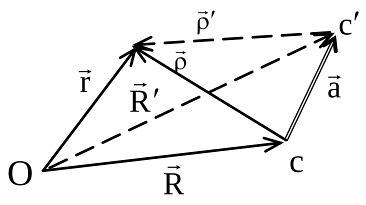
где обозначения очевидны из рисунка. Дифференцирование (3.28) по времени дает нам мгновенное распределение ускорений:

$$\bar{\omega} = \bar{w} + \left[\dot{\bar{\omega}}\bar{\rho}\right] + \left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{\rho}\right]\right]. \tag{3.29}$$

Изменим теперь начало подвижных систем координат, заменив точку C точкой C', сдвинутой на вектор $\bar{a}$. При этом для векторов имеем:

$$\bar{R} = \bar{R}' - \bar{a}, \qquad \bar{\rho} = \bar{\rho}' + \bar{a}\,.$$

Подставив эти значения в (3.28), получим:



$$\vec{v} = \vec{V} + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\rho}' + \vec{a}\right]\right] + \left\{\vec{V} + \left[\vec{\omega}\vec{a}\right]\right\} + \left[\vec{\omega}\vec{\rho}'\right]. \qquad (3.30)$$

С другой стороны, по определению векторов $\bar{V}'$ и $\bar{\omega}'$ должно быть:

$$\bar{v} = \bar{V}' + \left[\bar{\omega}'\bar{\rho}'\right]. \qquad (3.31)$$

Из сравнения (3.31) с (3.30) заключаем:

$$\bar{\omega}' = \bar{\omega} \quad \text{и} \quad \bar{V}' = \bar{V} + \left[\bar{\omega}\bar{a}\right]. \qquad (3.32)$$

Таким образом, *угловая скорость носит «абсолютный» характер*, тогда как поступательная скорость такого «абсолютного» характера не имеет.

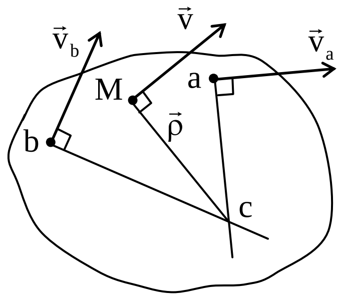
д) *Плоско-параллельное движение*

Это движение есть частный случай свободного движения твердого тела, важный даже с точки зрения школьной физики. Под ним понимается такое движение, при котором все частицы твердого тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. При его исследовании достаточно рассмотреть плоскую фигуру – одно из сечений тела плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости.

Согласно результатам п.г), подобное движение разлагается на поступательное (2 степени свободы) и на вращение плоской фигуры относительно выбранной ее точки (одна степень свободы). Отсюда видим, что наше твердое тело имеет *три степени свободы*, скажем, X, Y, Z. Распределение скоростей задается формулой (3.28):

$$\bar{v} = \bar{V} + \left[\bar{\omega}\bar{\rho}\right], \qquad (3.33)$$

причем векторы $\bar{v}$, $\bar{V}$ и $\bar{\rho}$ лежат в плоскости фигуры, а вектор $\bar{\omega}$ перпендикулярен этой плоскости. Но пользоваться формулой (3.33) при решении конкретных задач не совсем удобно. Ситуацию значительно упрощает следующее утверждение:



<u>Теорема о мгновенном центре</u>

Если плоско-параллельное движение не является поступательным, то всегда имеется *мгновенный центр* C, т.е. точка с $\bar{v}_c = 0$, причем для его отыскания достаточно знать направления скоростей $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_b$ и каких-то двух точек a и b.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о</u>

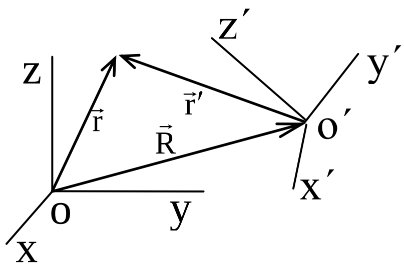
Возьмем две произвольные точки a и b фигуры и проведем перпендикуляры к векторам $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_b$,которые предполагаются непараллельными (такие точки a и b всегда найдутся). Точка их пересечения C и есть искомая. Для доказательства того, что $\bar{v}_c = 0$, достаточно воспользоваться теоремой о скольжении, и его предполагается провести самостоятельно.

Заметим, что в процессе доказательства теоремы установлен и рецепт отыскания мгновенного центра. В итоге плоско-параллельное движение в данный момент времени сведено к вращению тела относительно неподвижной оси. В частности, *для мгновенного распределения скоростей* получаем:

$$\bar{v} = \left[\bar{\omega}\bar{\rho}\right] \Leftrightarrow \frac{v_a}{v_b} = \frac{\rho_a}{\rho_b}\,. \tag{3.34}$$

Последняя формула и применяется при решении задач.

§4. Движущиеся системы отсчета



В предыдущем параграфе мы иногда связывали с твердым телом разные системы отсчета, но практически ими не пользовались. Рассмотрим проблему более подробно, и прежде всего сформулируем задачу.

Пусть дана «неподвижная»система отсчета S и относительно нее произвольным, но заданным образом движется система отсчета S и относительно нее произвольным, но заданным образом движется система отсчета S', и прежде всего, ее закон движения $\bar{r}' = \bar{r}'(t)$, скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{w}'$. Требуется найти кинематические характеристики этой частицы в системе S.

Что касается закона движения, то он записывается сразу (см. рисунок):

$$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{R}, \tag{4.1}$$

где функции $\bar{r}'(t)$ и $\bar{R}(t)$ по самой постановке задачи считаются заданными.

Для вычисления других кинематических характеристик нужно дифференцировать по времени соотношение (4.1). Производные от нештрихованных векторов имеют самый обычный смысл, ибо они задаются своими компонентами в системе отсчета S, орты которой «неподвижны». В частности,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}, \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{w}; \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}; \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{W}, \tag{4.2}$$

где $\bar{v}$ и $\bar{w}$ – искомые скорость и ускорение в системе S, $\bar{V}$ и $\bar{W}$ – скорость и ускорение начала подвижной системы отсчета относительно S'.

Однако производные типа $d\bar{A}'/dt$ от векторов $\bar{A}'$, заданных своими компонентами в системе S', имеют достаточно хитрый смысл, ибо при их вычислении следует дифференцировать не только компоненты $A'_{x'}, A'_{y'}, A'_{z'}$, но и базисные орты $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$, меняющие свою ориентацию относительно системы S. Тем не менее, весь аппарат для вычисления подобных производных у нас уже есть – он фактически развит в §3.

Полное приращение $d\bar{A}'$ вектора $\bar{A}'$ складывается из нескольких частей.

1. За счет перемещения частицы вектор $\bar{A}'$ может измениться уже относительно системы S'. Обозначим соответствующее приращение как

$$d\vec{A}_I = \left(d\bar{A}\right)_0. \tag{4.3}$$

Индекс нуль указывает на то, что это приращение может отличаться от нуля даже в том случае, когда система S' неподвижна относительно S, и поэтому его можно назвать «физическим» приращением.

2. Пусть теперь вектор $\bar{A}'$ постоянен относительно S', так что в этом отношении нашу частицу можно рассматривать как точку твердого тела, движущегося вместе с системой S'. Приращение вектора $\bar{A}'$ будет обусловлено только этим движением, являясь "фиктивным". Поступательное движение не меняет $\bar{A}'$, и все приращение $d\bar{A}'$ связано с вращением системы координат, причем, согласно (3.17),

$$d\bar{A}'_{II} = \left[d\bar{\varphi}, \bar{A}'\right]. \tag{4.4}$$

Суммируя результаты (4.3) и (4.4), имеем

$$d\bar{A}' = \left(d\bar{A}'\right)_0 + \left[d\vec{\varphi}, \bar{A}'\right] \tag{4.5}$$

или, после деления на время движения dt,

$$\frac{d\bar{A}'}{dt} = \dot{\bar{A}}' + \left[\bar{\omega}\bar{A}'\right]. \tag{4.6}$$

Слева стоит полная производная по времени, а точкой обозначено дифференцирование, не учитывающее движение системы отсчета S'.

Возвращаясь к нашей основной задаче, продифференцируем закон движения частицы (4.1) по времени и примем во внимание (4.2) и (4.6) при $\bar{A}' = \bar{r}'$. Тогда для скорости частицы получим:

$$\bar{v} = \bar{v}' + \left\{\bar{V} + \left[\bar{\omega}\bar{r}'\right]\right\}. \tag{4.7}$$

Терминология (несколько устаревшая): $\bar{v}$ – *абсолютная скорость*, $\bar{v}'$ – *относительная скорость*, величина в фигурных скобках – *переносная скорость*. Последняя есть скорость той точки твердого тела, связанного с S', в которой находится частица в данный момент времени.

Дифференцируя по времени (4.7) с учетом (4.2) и (4.6) при $\bar{A}' = \bar{r}'$ и $\bar{B}' = \bar{v}'$, для *ускорения частицы* будем иметь:

$$\dot{\bar{v}} = \left\{\dot{\bar{v}}' + \left[\bar{\omega}, \bar{v}'\right]\right\} + \dot{\bar{V}} + \left\{\left[\dot{\bar{\omega}}, \bar{r}'\right] + \left[\bar{\omega}, \bar{v}'\right]\right\} + \left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{r}'\right]\right],$$

или

$$\bar{w} = \bar{w}' + \left\{\bar{W} + \left[\dot{\bar{\omega}}\bar{r}'\right] + \left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{r}'\right]\right]\right\} + 2\left[\bar{\omega}\bar{v}'\right]. \tag{4.8}$$

Терминология: $\bar{w}$ – *абсолютное* ускорение,

$\bar{w}' = \dot{\bar{v}}'$ – *относительное* ускорение

$\left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{r}'\right]\right]$ – *центробежное* ускорение,

$2\left[\bar{\omega}\bar{v}'\right]$ – *кориолисово* ускорение,

величина в фигурных скобках – *переносное* ускорение. Кориолисово ускорение есть результат интерференции относительного и переносного движений. В важных частных случаях *поступательного* движения и *равномерного вращения* системы отсчета S' (4.8) получаем:

$$\bar{w} = \bar{w}' + \bar{W} \quad \text{и} \quad \bar{w} = \bar{w}' + \left[\bar{\omega}\left[\bar{\omega}\bar{r}'\right]\right] + 2\left[\bar{\omega}\bar{v}'\right] \tag{4.9}$$

соответственно.

§5. Преобразования систем отсчета

Как говорилось в §1, задание системы отсчета S отображает множество событий $\{E\}$ в множество точек X четырехмерного пространства $\mathbb{R}^4$:

$$S:\ E \to X \equiv (\vec{r};t) = (x,y,z;t) \equiv (x_1 x_2 x_3;t). \qquad (5.1)$$

Всюду ниже мы для определенности пользуемся *декартовыми* координатами. В принципе систему отсчета можно выбирать совершенно произвольным образом, переходя от исходной системы S по какому-то определенному правилу g к новой системе отсчета S':

$$g:\ \mathrm{S} \to \mathrm{S}'. \qquad (5.2)$$

При этом, вообще говоря, изменяются:

1. координаты событий,
2. Значения геометрических и физических величин,
3. уравнения геометрических соотношений и физических законов.

Разные системы отсчета у нас эпизодически возникали в кинематике твердого тела, и лишь в предыдущем параграфе они фигурировали явным образом. Правда,,как будет ясно из дальнейшего, рассмотренный там случай, несмотря на свою общность, является далеко не самым интересным.

Теперь мы намерены обсудить соответствующую проблематику более подробно. Ближайшая цель состоит в выяснении общего характера указанных изменений, которые сопутствуют переходу от S к S', и в рассмотрении наиболее важных частных случаев. Возникшие при этом понятия играют фундаментальную роль во всей современной физике, и они будут интенсивно эксплуатироваться на протяжении всего трехгодового курса.

а) *Преобразование координат событий*

Обозначим координаты какого-то фиксированного события в системах S и S' через X и X' соответственно. Тогда получим диаграмму, отображенную на рисунке. Она вводит определенный оператор в $\mathbb{R}^4$, отображающий координаты X в координаты X'. Мы его будем обозначать той же буквой g, ибо это не приведет ни к каким недоразумениям:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S} \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d] & \mathrm{S}' \\ \mathrm{X} \arrow[r, mapsto, "g"] & \mathrm{X}' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$g:\quad X \to X',\ \text{ или }\ X' = gX. \qquad (5.3)$$

Перечислим наиболее важные преобразования систем отсчета с указанием законов преобразования систем отсчета с указанием законов преобразования координат событий.

1. *Параллельный перенос* (трансляция) пространственной системы координат на вектор $\vec{a}$:

$$\overline{r}' = \overline{r} - \overline{a}, \quad t' = t. \qquad (5.4)$$

2. *Сдвиг* начала временной системы координат на τ:

$$\overline{r}' = \overline{r}, \quad t' = t - \tau. \qquad (5.5)$$

3. *Вращение* системы координат относительно ее начала:

$$\bar{r}' = \Omega\,\bar{r}, \qquad t' = t, \tag{5.6}$$

причем

$$\Omega\bar{0} = \bar{0} \quad \text{и} \quad \bar{r}'^2 = \left(\Omega\,\bar{r}\right)^2 = \bar{r}^2. \tag{5.7}$$

Первое равенство (5.7) отвечает тому, что начало пространственной системы координат неподвижно, а второе – тому, что при вращениях системы координат длины сохраняются. Запишем преобразование (5.6) в координатной форме:

$$x_i' = \Omega_{ij} x_j \tag{5.8}$$

[обозначения пояснены в (5.1)], где Ω_{ij} – матрица порядка 3×3. Второе условие (5.7) в этих обозначениях дает:

$$\bar{r}'^2 = x_i' x_i' = \left(\Omega_{ij} x_j\right)\left(\Omega_{ik} x_k\right) = \Omega_{ij}\Omega_{ik} x_j x_k = \tilde{\Omega}_{ji}\Omega_{ik} x_j x_k =$$
$$= \bar{r}^2 = x_i x_i = \delta_{jk} x_j x_k.$$

Отсюда, в силу произвольности x_i,

$$\tilde{\Omega}_{ji}\Omega_{ik} = \delta_{jk}, \tag{5.9}$$

или, в матричной символике:

$$\tilde{\Omega}\Omega = I, \tag{5.10}$$

где тильда означает транспонирование, а I – единичная матрица. Таким образом, вращения пространственной системы координат представляются *ортогональными* матрицами порядка 3×3. Взяв детерминант от обеих частей (5.10), получаем:

$$\det\left(\tilde{\Omega}\,\Omega\right) = \det\tilde{\Omega}\cdot\det\Omega = \left(\det\Omega\right)^2 = \det I = 1,$$

откуда:

$$\det\Omega = \pm 1. \tag{5.11}$$

Но всякое вращение можно непрерывным образом получить из тождественного преобразования e, для которого $\det I = 1$. Поэтому на самом деле вращения представляются не любыми ортогональными матрицами, а лишь *ортогональными матрицами с единичным детерминантом*:

$$\det\Omega = +1. \tag{5.12}$$

Важный частный случай вращений – повороты пространственной системы координат вокруг фиксированной оси, скажем, оси Oz, на произвольные углы φ. Как известно из аналитической геометрии, они представляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{matrix}\right\}. \tag{5.13}$$

В СТО важную роль будут играть повороты на чисто мнимые углы $\varphi = i\varphi$, но пока на этом мы останавливаться не будем.

4. *Пространственная инверсия*, т.е. отражение координатных осей относительно начала:

$$\bar{r}' = J\bar{r} = -\bar{r}, \quad t' = -t. \tag{5.14}$$

5. *Обращение времени*:

$$\bar{r}' = \bar{r}; \quad t' = -t. \tag{5.15}$$

6. Переход от системы отсчета S к системе отсчета S', *движущейся* относительно S поступательно со скоростью $\bar{V} = const$. Его осуществляют:

а) в нерелятивистской физике – *преобразования Галилея*:

$$X' = \Gamma X; \tag{5.16}$$

б) в релятивистской физике – *преобразования Лоренца:*

$$X' = LX. \tag{5.17}$$

В явном виде преобразования Галилея будут выписаны в следующем параграфе. Преобразования Лоренца будут рассмотрены в курсе СТО. Переход к системам отсчета S', движущихся относительно S произвольным образом, который был обсужден в предыдущем параграфе, в классической механике играет гораздо менее важную роль, чем преобразования Галилея, и мы с соответствующими ему преобразованиями встретимся еще всего один раз. Но зато они играют фундаментальную роль в общей теории относительности.

Множество преобразований каждого из перечисленных классов 1-6 обладает следующей *математической структурой:*

(а). В нем естественно вводится операция *умножения*:

$$\forall g_1 g_2 \in G \rightarrow g_3 \equiv g_2 g_1 \in G, \tag{5.18}$$

состоящая в последовательном применении преобразований g_1 и g_2, что приводит к преобразованию g_3 того же класса.

(б). Умножение, очевидно, *ассоциативно*:

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G. \tag{5.19}$$

(в). Существует *единичный элемент* $e \in G$, такой что

$$eg = ge = g, \qquad \forall g \in G. \tag{5.20}$$

(г). Каждому элементу g отвечает *обратный элемент* g^{-1}, такой, что

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e. \tag{5.21}$$

Таким образом, с математической точки зрения множество преобразований данного класса является *группой* G:

1. группой трансляций $\mathbb{R}^3$;
2. группой сдвигов $\mathbb{R}$;
3. группой вращений $SO(3)$;
4. группой пространственной инверсии $\wp$;
5. группой обращения времени T;

6а. группой преобразований Галилея;
6б. группой Лоренца.

Группы 4-5 обладают каждая всего двумя элементами – единицей e и инверсией J с таблицей умножения, выписанной отдельно. Группы 1-6 бесконечны – каждая из них содержит континуальное множество элементов, которые в группах $\mathbb{R}$ и $SO(3)$ задаются тремя, а в группе $\mathbb{R}$ – одним вещественными параметрами. Группа вращений некоммутативна, т.е. для ее элементов, вообще говоря,

	e	J
e	e	J
J	J	e

$$g_1 g_2 \neq g_2 g_1. \qquad (5.22)$$

Иными словами, результат двух последовательных вращений системы координат зависит от порядка, в котором произведены эти вращения. Убедиться в этом каждый может самостоятельно «на пальцах», в буквальном смысле этого слова.

б) Физические величины

При изменении системы отсчета значение f данной физической величины F (пути, скорости, ускорения и т.д.), вообще говоря также изменяются, причем по вполне определенному закону. В этом смысле говорят, что физические величины являются *ковариантами* рассматриваемой группы преобразований. Расшифруем смысл этого важного понятия.

При переходе от системы отсчета S к S' возникает диаграмма, подобная той, которая была в пункте а) для преобразования координат событий, но с заменой X на f и g на $T(g)$. Она вводит *операторы* $T(g)$, действующие в множестве $\{f\}$ значений данной физической величины F:

$$f' = T(g) \cdot f\ . \qquad (5.23)$$

Вид этих операторов определяется как природой физической величины (символ T), так и произведенным преобразованием системы отсчета (символ g).

Переходя от системы отсчета S к S'' сначала непосредственно, а затем в два этапа, через систему отсчета S', получим диаграмму, подобную приведенной ранее для преобразований координат событий (с указанными выше заменами). Из нее будем иметь

$$f'' = T(g_3)\, f = T(g_2 g_1)\, f \ \text{ и } \ f'' = T(g_2)\, f' = T(g_2) T(g_1)\, f, \qquad (5.24)$$

откуда в силу произвольности f,

$$T(g_2 g_1) = T(g_2) T(g_1), \quad \forall g_1, g_2 \in G \qquad (5.25)$$

(сравнить с рассуждениями, которые привели к формуле (5.18). Очевидно также равенство

$$T(e) = I\,,$$

где e – единичный элемент группы, I – единичный оператор.

Величины, значения которых преобразуются по закону (5.23), где операторы $T(g)$ удовлетворяют условиям (5.25), и называются *ковариантами*. Их важным частным случаем являются *инварианты*, значения которых не меняются при изменении системы отсчета:

$$f' = f \Leftrightarrow T(g) = I, \quad \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}\,.$$

Математики говорят, что операторы $T(g)$, действующие в некотором линейном пространстве и обладающие свойством (5.24), реализуют *представление* рассматриваемой группы G. Представление (5.25), отвечающее инвариантам, называется *тождественным*, *единичным*, или *тривиальным*. Мы видим, что понятие представления группы возникает в физике столь же естественным образом, как и понятие самой группы.

Рассмотрим с обсуждаемой точки зрения введенные выше классы преобразований систем отсчета.

1. Дифференцируя (5.4) по времени t, имеем

$$\frac{d\bar{r}'}{dt'} = \frac{d\bar{r}}{dt'} = \frac{d\bar{r}}{dt}\,,$$

или

$$\bar{v}' = \bar{v}\,. \tag{5.26}$$

Таким образом, скорость (и ускорение) является инвариантом преобразований пространственных трансляций.

2. Учитывая, что $\bar{r}' = \bar{r}$ и что

$$\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left[\frac{dt'}{dt}\right]^{-1}\frac{d}{dt} = \left[\frac{d(t-\tau)}{dt}\right]^{-1}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\,,$$

заключаем, что все кинематические величины суть инварианты преобразований сдвигов во времени.

3. Дифференцируя (4.7) по времени t', имеем

$$\frac{d\bar{r}'}{dt'} = \frac{d(\Omega\bar{r})}{dt} = \Omega\frac{d\bar{r}}{dt}\,,$$

т.е.

$$\bar{v}' = \Omega\bar{v} \tag{5.27}$$

и, аналогично,

$$\bar{w}' = \Omega\bar{w}\,. \tag{5.28}$$

Определение. Тройка чисел A_1, A_2, A, преобразующихся при вращении пространственной системы координат по тому же закону, что и декартовы координаты точки, т.е. по закону

$$A_i' = \Omega_{ij}A_j\,, \tag{5.29}$$

называется *3-мерным вектором*.

Таким образом, скорость и ускорение частицы являются трехмерными векторами. Аналогично, трехмерными векторами будут секторная скорость и угловая скорость, а также векторное произведение двух любых векторов. В частности, ротор векторного поля порождает векторное же поле.

У группы вращений имеются и другие ковarианты. Так, путь S является скаляром (инвариантом). Скалярами будут также скалярные произведения двух векторов, в частности, квадраты векторов. Но и этим не исчерпывается все ковarианты группы вращений.

Определение. Совокупность 3^n чисел $A_{i_1 \ldots i_n}$, преобразующихся при вращении пространственной системы координат, как произведение n декартовых координат точки, т.е. по закону

$$A'_{i_1 \ldots i_n} = \Omega_{i_1 j_1} \ldots \Omega_{i_n j_n} A_{j_1 \ldots j_n}, \tag{5.30}$$

называется *тензором ранга* n.

Очевидно, что скаляр и вектор – частные случаи тензоров: первый – ранга 0, второй – ранга1. В классической механике нам встретится лишь один нетривиальный тензор – тензор инерции, имеющий ранг 2. Зато в теории относительности тензорный анализ является основным математическим аппаратом.

4. Дифференцируя (5.14) по времени t', имеем:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\left(-\vec{r}\right)}{dt} = -\frac{d\vec{r}}{dt},$$

т.е.

$$\vec{v}' = -\vec{v}' \tag{5.31}$$

и, аналогично:

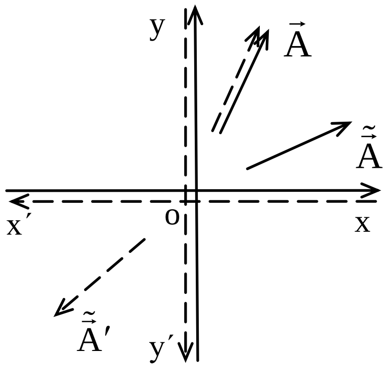
$$\vec{w}' = -\vec{w}'. \tag{5.32}$$

Определение. Трехмерные векторы, компоненты которых изменяют знаки при пространственной инверсии, и называют *истинными векторами* или просто *векторами*.

Таким образом, скорость и ускорение суть истинные векторы, наряду с ними имеются и трехмерные векторы иной природы.

Определение. Трехмерные векторы, компоненты которых не меняют знаки при пространственной инверсии, называются *псевдовекторами* или *аксиальными векторами*.

К псевдовекторам относятся секторная скорость и угловая скорость, векторные произведения истинных векторов, ротор от истинного вектора, векторного поля. Псевдовекторы так или иначе связаны с вращением и правилом буравчика. Можно сказать также, что истинный вектор $\vec{A}$ «прикреплен» к точке пространства, а псевдовектор $\tilde{\vec{A}}$ – к точке, жестко связанной с координатной сеткой. Различие в их поведении при пространственной инверсии иллюстрирует рис.



В общей ситуации ковариант группы вращений именуется *истинным тензором*, если при пространственной инверсии его компоненты умножаются на $(-1)^n$ (n – ранг тензора), и *псевдотензором*, если они умножаются на $(-1)^{n+1}$. Так, истинный скаляр – инвариант группы пространственной инверсии, псевдоскаляр изменяет знак при инверсии ($\tilde{\varphi}' = -\tilde{\varphi}$). К псевдоскалярам относятся, например, скалярные произведения истинных векторов на псевдовекторы – в частности, смешанные произведения трех векторов. Следует иметь в виду, что если префикс «псевдо» встречается в данной операции четное число раз, то он «погашается». Так, двойное векторное произведение истинных векторов есть истинный вектор. Истинным вектором является и ротор псевдовекторного поля (скажем, $rot\,\vec{B}$, где $\vec{B}$ – (псевдо)вектор индукции магнитного поля).

Поскольку

$$d/d(-t) = -d/dt,$$

то следует, что

$$\vec{v}' = -\vec{v} \quad \text{и} \quad \vec{w}' = \vec{w}.$$

Таким образом, скорость – истинный временной вектор, а ускорение – временной псевдовектор. Секторная скорость является истинным временным вектором, т.е. при обращении времени ее компоненты приобретают знак минус.

в) *Преобразование уравнений*

Разумеется, от исходной системы отсчета всегда можно перейти к любой новой системе отсчета, например, вращающейся. От этого *физическое содержание* теоретической схемы нисколько не изменится, но описание данного явления, т.е. *форма уравнений*, отвечающих физическим законам, в общем случае может перетерпеть существенные изменения. Так, при переходе к вращающейся системе отсчета во втором законе Ньютона появляются фиктивные силы инерции, имеющие чисто кинематическое происхождение.

Эта проблема подробно будет исследована в связи с классической динамикой, и особенно в связи с основаниями СТО. Здесь же мы ограничимся совсем краткими замечаниями.

Среди всевозможных преобразований систем отсчета выделяется чрезвычайно важный класс, играющий фундаментальную роль во всей современной физике.

<u>Определение</u>. Преобразования систем отсчета, относительно которых все уравнения, представляющие физические законы и геометрические соотношения, ковариантны, т.е. не меняют своей формы, называются *преобразованиями инвариантности*.

Если говорить подробнее, то это означает следующее. Преобразование инвариантности может изменить значения физических величин, входящих в то или иное уравнение. Но связь между ними должна быть такой, чтобы соответствующее уравнение переходило бы в такое же по форме уравнение. Иными словами, соотношение между исходными значениями физических величин и их преобразованными значениями должно сохраниться. Это означает, что все слагаемые, входящие в ковариантные уравнения, должны преобразовываться по одному и тому же закону, т.е. быть ковариантами одного и того же типа. В частности, даже в случае прямолинейного движения бессмысленным является равенство

$$s = vt ,$$

если под S понимать путь частицы (скаляр), а под v – ее скорость (вектор). Это уравнение столь же абсурдно, как и запись вроде

$$s = 2v_x t$$

в трехмерном случае. Если она по случайным причинам и справедлива в исходной системе координат, то мгновенно нарушается после ее поворота.

В процессе развития физики выяснилось, что для замкнутых физических систем перечисленные выше преобразования 1-6 являются в подавляющем большинстве случаев преобразованиями симметрии.
Это отражает:

1. однородность пространства,
2. однородность времени,
3. изотропность пространства,
4. зеркальную симметрию пространства,
5. обратимость времени,
6. принцип относительности (в узком смысле слова).

Исключение, лишь подтверждающее общее правило, составляют замкнутые физические системы со слабым взаимодействием между частицами. Это взаимодействие всегда нарушает зеркальную симметрию пространства, причем максимальным образом, а в ряде случаев оно приводит к небольшому нарушению обратимости времени, причем уже на микроскопическом уровне.

Среди всех физических законов выделяются законы эволюции, которые подразделяются на *уравнения движения* и *законы сохранения*. Уравнения движения и законы сохранения не являются независимыми друг от друга, а связаны через посредство *свойств симметрии*. Если уравнения движения допускают некоторую группу преобразований симметрии, то, согласно *теореме Нетер*, это приводит к существованию определенных законов сохранения. В этом смысле и говорят, что *законы сохранения являются следствием свойств симметрии*. Из однородности пространства вытекает закон сохранения импульса, из однородности времени – закон сохранения энергии, из изотропности пространства – закон сохранения момента импульса, из зеркальной симметрии пространства – квантовомеханический закон сохранения четности, который нарушается слабым взаимодействием. Обратимость времени не приводит ни к какому закону сохранения (но из нее вытекает ряд важных физических положений, например, принцип детального равновесия). А законы сохранения, следующие из ковариантности уравнений движения относительно преобразований Галилея или Лоренца, не являются независимыми от предыдущих.

Напомним, что утверждение о существовании в данной физической теории максимально широкой группы преобразований симметрии вместе с ее указанием и составляет *принцип относительности в общей трактовке этого термина*.

Формулировка принципа относительности предполагает, что рассматриваются только *замкнутые физические системы*. Если же система не замкнута, т.е. помещена во внешнее поле, то часть свойств симметрии пространства-времени оказывается потерянной, и группа преобразований симметрии для таких систем сужается.

§6. Преобразования Галилея

Рассмотрим теперь систему отсчета S', которая движется относительно S поступательно с постоянной скоростью $\vec{V}$. Собственно, необходимые результаты можно извлечь из общих формул, полагая в них $\vec{\omega}=0$ и $\vec{W}=0$. Но данный частный случай как раз более важен для классической механики. И чтобы оттенить все возникающие здесь тонкие моменты, мы исследуем его отдельно.

Сначала будем предполагать, что временные системы координат в S и в S' совпадают. Кроме того, считаем пока, что в нулевой момент времени $t=t'=0$ совпадают и пространственные системы координат – их начала O и O', а также координатные оси x, y, z и x', y', z' соответственно. Тогда в произвольный момент времени эти координатные оси будут попарно параллельны, ибо, по условию S' движется относительно S поступательно.

Как и всегда, обсуждение начнем с обсуждения преобразований координат событий. В качестве обобщения многочисленных опытных данных можно сформулировать следующий фундаментальный постулат классической физики.

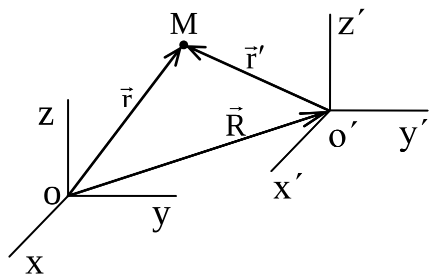
Постулат. Переход от координат события в системе отсчета S к координатам того же события в системе отсчета S', движущейся относительно S поступательно со скоростью $\overline{V}=const$, осуществляют *преобразования Галилея*

$$\left.\begin{aligned} \overline{r}' &= \overline{r} - \overline{V}t \\ t' &= t \end{aligned}\right\}. \tag{6.1}$$

Фактически, этот постулат включает множество явных и не явных предположений о структуре пространства-времени, которые делаются в классической физике. Главные из них были сформулированы в §1:

1. существование сигналов со сколь угодно большой скоростью, позволяющих осуществить естественную синхронизацию часов в разных системах отсчета;
2. абсолютность времени, т.е. независимость его течения от положения часов и от состояния их движения;
3. абсолютность длин и углов;
4. трехмерность и евклидовость пространства;
5. более мелкие и частные гипотезы.

Но здесь имеется один чрезвычайно тонкий пункт. На первый взгляд кажется, что при выводе второй формулы (6.1) абсолютность времени не используется, а весь вывод основывается на чисто геометрических соображениях.



Но, если бы это было действительно так, то данная формула осталась бы справедливой и в релятивистской физике, что заведомо неверно. «Подводный камень» скрыт столь глубоко, что о его существовании никто и не подозревал до начала 20-го века, а преобразования Галилея считались самоочевидными. Теперь же мы знаем, что это не так, и преобразования Галилея должны выводиться строго из более фундаментальных положений. К их числу относятся, прежде всего, гипотеза о существовании сигналов, распространяющихся сколь угодно быстро. Только на ее основе можно перейти от действительно очевидных равенств

$$\overline{r}_S = \overline{r}_S' + \overline{r}_{-S} \quad \text{и} \quad \overline{r}_{S''} = \overline{r}_{S'} + \overline{R}_{S'}$$

к равенству

$$\bar{r}_S = \bar{r}'_{S'} + \bar{R}_{S'},$$

необходимому для получения формулы

$$\bar{r}' = \bar{r} - \bar{V}t$$

(индексы указывают, в какой именно системе отсчета измерен данный радиус-вектор). Реально строгий вывод преобразований Галилея, свободных от всяческих недомолвок, оказывается весьма сложным. Он будет проведен параллельно с выводом преобразований Лоренца.

Пока же принимаем формулы (6.1) в качестве одного из основных постулатов классической физики. Символически их можно записать как

$$x' = g\left(\bar{V}\right)x. \tag{6.2}$$

Полезно привести также формулы обратных преобразований Галилея, отвечающих переходу от системы отсчета S' к S и следующих из (6.1)

$$t = t', \ \ \bar{r} = \bar{r}' + \bar{V}t' \ \ \text{или} \ \ x = g(-\bar{V})x'. \tag{6.3}$$

Множество всех преобразований Галилея $g\left(\bar{V}\right)$ образует 3-параметрическую группу, именуемую *группой преобразования Галилея*. Переходя сначала от S к S' (скорость $\bar{V}_1$), а затем от S' к S'' (скорость $\bar{V}_2$) и учитывая, что

$$t'' = t, \quad \bar{r}'' = \bar{r} - (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)t \tag{6.4}$$

и

$$g\left(\bar{V}_2\right)g\left(\bar{V}_1\right) = g\left(\bar{V}_1 + \bar{V}_2\right), \tag{6.5}$$

имеем:

$$\bar{r}' = \bar{r} - \bar{V}_1 t, \qquad \bar{r}'' = \bar{r}' - \bar{V}_1 t. \tag{6.6}$$

Нас интересует результат совместного действия этих преобразований и координаты события в исходной системе отсчета S. Из (6.6) получаем

$$\bar{r}'' = \bar{r}' - \bar{V}_2 t = \left(\bar{r} - \bar{V}_1 t\right) - \bar{V}_2 t = \bar{r} - \left(\bar{V}_1 + \bar{V}_2\right)t, \quad t'' = t' = t, \tag{6.7}$$

т.е.

$$\bar{r}'' = \bar{r} - \bar{V}t, \quad \bar{V} \equiv \bar{V}_1 + \bar{V}_2; \quad t' = t.$$

Таким образом, последовательное выполнение двух преобразований Галилея со скоростями $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ действительно равнозначно одному преобразованию Галилея. Соответствующая ему скорость $\bar{V}$ равна

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2, \tag{6.8}$$

так что в символической форме записи:

$$g\left(\bar{V}_2\right)g\left(\bar{V}_1\right) = g\left(\bar{V}_1 + \bar{V}_2\right). \tag{6.9}$$

Роль единичного элемента e в группе преобразований Галилея играет $g\left(\bar{O}\right)$, а роль элемента $g^{-1}\left(\bar{V}\right)$, обратного к $g\left(\bar{V}\right)$, – элемент $g\left(-\bar{V}\right)$. Отметим также, что полученный результат (6.8) есть частный случай классического закона сложения скоростей, о котором речь пойдет ниже.

В начале параграфа мы сделали ряд частных предположений относительно взаимосвязи систем отсчета S и S'. Они не являются принципиальными. Отказываясь от них и дополняя преобразования Галилея (6.1) пространственными трансляциями и вращениями, а также сдвигами во времени, придем к преобразованиям вида:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}' &= \Omega\vec{r} - \bar{V}\left(t-\tau\right) - \vec{a} \\ t' &= t - \tau \end{aligned}\right\}. \tag{6.10}$$

Эти преобразования образуют 10-параметрическую *собственную группу Галилея* – в том смысле, что она не содержит дискретных операций. Если к тому же включить пространственную инверсию и обращение времени, получим *полную группу Галилея*. Как мы увидим в гл.II, именно она является наиболее общей группой преобразований инвариантности классической механики.

Выясним теперь, как при преобразованиях Галилея изменяются значения физических величин. Пока у нас к ним относятся кинематические характеристики частицы, главные из которых – скорость и ускорение. Из кинематических следствий преобразований Галилея (6.1) отметим следующие простые результаты:

а) *Инвариантность промежутков времени*:

$$\tau' = \tau\,. \tag{6.11}$$

б) *Инвариантность длин*:

$$l' = l\,. \tag{6.12}$$

При этом под расстоянием между точками 1 и 2 в заданной системе отсчета понимается модуль разности радиусов-векторов этих точек, измеренных в один и тот же момент времени. Поэтому имеем:

$$l'_{1-2} = \left|\bar{r}'_2 - \bar{r}'_1\right|_{t'_1=t'_2} = \left|\left(\bar{r}_2 - \bar{V}t_2\right) - \left(\bar{r}_1 - \bar{V}t_1\right)\right|_{t_1=t_2} = \left|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\right|_{t_1=t_2} = l_{1-2}\,,$$

что и утверждает (6.12).

в) *Классический закон сложения скоростей*:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'\,. \tag{6.13}$$

Действительно, дифференцируя (6.1) по времени t', имеем

$$\bar{v}' = \frac{d\bar{r}'}{dt'} = \frac{d\left(\bar{r} - \vec{V}t\right)}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} - \bar{V} = \bar{v} - \bar{V}\,.$$

В отличие от §4, никаких проблем с дифференцированием здесь не возникает, поскольку S' движется относительно S поступательно, а потому $\vec{\omega}=0$.

г) *Инвариантность ускорений*:

$$\vec{w}'=\vec{w}. \tag{6.14}$$

Действительно, дифференцируя (6.13) по времени t' и учитывая, что $\vec{V}=const$, имеем:

$$\vec{w}'=\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\frac{d\left(\vec{v}-\vec{V}\right)}{dt}=\frac{d\vec{v}}{dt}-0=\vec{w}.$$

И здесь справедливо замечание, сделанное в предыдущем пункте.

д) *Инвариантность относительных скоростей*:

$$\vec{u}'=\vec{u}. \tag{6.15}$$

Этот пункт требует несколько более пространного комментария. Часто относительной скоростью частицы 2 по отношению к частице 1 называют разность $\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Но это, вообще говоря, неверно, поскольку при таком понимании относительной скорости мы сразу пришли бы к возможности существования и в СТО сверхсветовых скоростей, что ,как известно, абсурдно. Тем самым само понятие относительной скорости требует какого-то предварительного определения.

Определение. Под *относительной скоростью* $\vec{v}_{2-1}\equiv\vec{u}$ частицы 2 по отношению к частице 1 понимается скорость второй частицы в системе отсчета, в которой первая частица в данным покоится.

Иными словами, относительная скорость $\vec{u}$ вычисляется как скорость частицы 2 в системе отсчета, связанной в данный момент времени с частицей 1.

Теорема. В нерелятивистской механике

$$\vec{u}=\vec{v}_2-\vec{v}_1. \tag{6.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Согласно классическому закону сложения скоростей,

$$\vec{v}_1'=\vec{v}_1-\vec{V} \quad \text{и} \quad \vec{v}_2'=\vec{v}_2-\vec{V}. \tag{6.17}$$

Скорость $\vec{V}$ системы отсчета, в которой в данный момент времени частица 1 покоится, найдем из первой формулы (6.17):

$$0=\vec{v}_1-\vec{V}\Rightarrow\vec{V}=\vec{v}_1.$$

В этой системе отсчета по определению $\vec{v}_2'=\vec{u}$. Подставляя значение $\vec{V}=\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2'=\vec{u}$ во вторую формулу (6.17), получим

$$\vec{u}=\vec{v}_2-\vec{v}_1,$$

что и утверждает (6.16).

Дальнейшие выкладки, подтверждающие инвариантность относительной скорости, тривиальны:

$$\vec{u}' = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' = \left(\vec{v}_2 - \vec{V}\right) - \left(\vec{v}_1 - \vec{V}\right) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{u}\,,$$

и мы приходим к равенству (6.15).